MATURA PODSTAWOWA nr 2
NOWA FORMUŁA, czas pracy 170 minut

ODPOWIEDZI + szczegółowe rozwiązania zadań otwartych

Szczegółowych rozwiązań zadań zamkniętych będzie można szukać na www.licz24.pl

---

1. Liczba $3-|3-\sqrt{10}|$ jest równa

A. $-\sqrt{10}$ B. $\sqrt{10}$ C. $6-\sqrt{10}$ D. $6+\sqrt{10}$

---

2. Jeśli liczba $\boldsymbol{a}$ jest o 20% mniejsza od liczby $\boldsymbol{b}$, to zachodzi równość

A. $5a=4b$ B. $6a=5b$ C. $4a=5b$ D. $5a=6b$

---

3. Cena pewnego produktu uległa czterem 15 procentowym obniżkom. Całkowita obniżka wynosi

A. około 48% B. około 51% C. około 52% D. 60%

---

4. Wskaż równanie prawdziwe

A. $5^2+5^{\frac{1}{2}}=25\sqrt{5}$ B. $\sqrt[3]{-6^2}=-\sqrt[3]{2\cdot 3}^{\,2}$
C. $\sqrt[3]{7^2}=\frac{1}{7^{3/2}}$ D. $8^{-\frac{1}{3}}=0{,}5^3$

---

5. Sumę liczb $\log_3 2 \ i \ 2\log_3 4$ można zapisać jako

A. $\log_3 18$ B. $\log_3 32$ C. $3\log_3 6$ D. $3\log_3 8$

6. Mediana liczb całkowitych spełniających nierówność $-3 \leq 1 - x < 4$ wynosi

A. 0 B. 1 C. 1,5 D.2

---

7. Łączna ilość wszystkich pierwiastków równań $\frac{x^2-16}{2x-8} = 0$ oraz $|x| = -4$ wynosi

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

---

8. Wyrażenie $-x^3 - 8$ jest równe

A. $-(x-2)(x^2+2x+4)$

B. $-(x+2)(x^2-2x+4)$

C. $(x-2)(x^2-2x-4)$

D. $(x+2)(x^2-2x+4)$

---

9. Dane są wielomiany $P(x) = 2x^4 - 2x^3 + 5x$ i $Q(x) = x^4 - x^3 + 3x^2$.
Stopień wielomianu $W(x) = \frac{1}{2}P(x) - Q(x)$ jest równy

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

---

10. Dla jakiego parametru ***m*** miejsce zerowe funkcji $f(x) = 2(mx-2)^2$ wynosi 4 ?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$ lub $\frac{1}{2}$

---

11. Funkcja kwadratowa spełnia warunek $f(-2) = f(5)$. Równanie osi symetrii wykresu tej funkcji to

A. $x = 1\frac{1}{2}$ B. $x = 2\frac{1}{2}$ C. $x = 3$ D. $x = 3\frac{1}{2}$

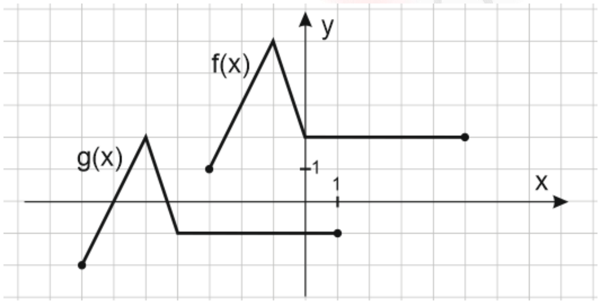
---

12. Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi prosta $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{7} - 3$?

A. I, II i III B. II, III i IV C. I, II i IV D. . I, III i IV

---

13. Poniższy wykres przedstawia wykresy funkcji $f(x)$ i $g(x)$. Który wzór prawidłowo wyraża funkcję $g(x)$ względem $f(x)$?



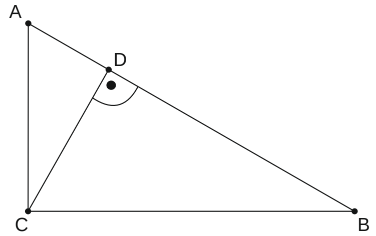
A. $g(x) = f(x-4) - 3$

B. $g(x) = f(x-4) + 3$

C. $g(x) = f(x+4) - 3$

D. $g(x) = f(x+4) + 3$

14. W trójkącie prostokątnym ABC z wierzchołka C poprowadzono wysokość jak na rysunku poniżej Wskaż poprawną relację, pomiędzy długościami poszczególnych odcinków.



A. $\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|CB|}{|BD|} = \frac{|AB|}{|CB|}$

B. $\frac{|CB|}{|CD|} = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|CB|}$

C. $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|CD|}{|DB|}$

D. $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|BD|} = \frac{|AB|}{|CB|}$

---

15. Dla trójkąta z zadania 14 prawdą jest, że

A. $\sin \sphericalangle ADC = \frac{|CD|}{|AD|}$

B. $\sin \sphericalangle CBD = \frac{|CD|}{|DB|}$

C. $\cos \sphericalangle BCD = \frac{|CD|}{|CB|}$

D. $\operatorname{tg} \sphericalangle CAD = \frac{|AD|}{|CD|}$

---

16. Wskaż równanie nieprawdziwe.

A. $\sin 40° + \cos 50° = 2 \cos 50°$

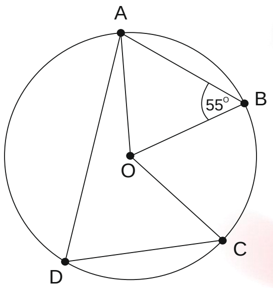
B. $1 - \sin^2 40° = \cos^2 40°$

C. $\cos 40° = \operatorname{tg} 40° \cdot \sin 40°$

D. $\cos 720° = \sin 90°$

---

17. Długości krótszych łuków AB i BC są sobie równe. Punkt O jest środkiem okręgu przedstawionego na rysunku oraz $\sphericalangle ABO = 55°$. Kąt ostry $\sphericalangle ADC$ ma miarę



A. $\sphericalangle ADC = 55°$

B. $\sphericalangle ADC = 65°$

C. $\sphericalangle ADC \approx 68°$

D. $\sphericalangle ADC = 70°$

---

18. Punkt $S = \left(-2\sqrt{2}\,,\ 2016\right)$ jest środkiem okręgu, który ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą o równaniu $x = \sqrt{2}$. Równanie tego okręgu ma postać

A. $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + (y + 2016)^2 = 3\sqrt{2}$

B. $\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 + (y - 2016)^2 = 3\sqrt{2}$

C. $\left(x - 2\sqrt{2}\right)^2 + (y + 2016)^2 = 18$

D. $\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 + (y - 2016)^2 = 18$

---

19. Obwód rombu o polu 2 i kącie ostrym 30° wynosi

A. 4 B. $4\sqrt{2}$ C. 6 D. 8

20. W ciągu arytmetycznym (a_n) dla $n \geq 1$, $a_4 = 1$ oraz $2a_3 + a_9 = 1$. Różnica tego ciągu jest równa

A. -2 B. $-\frac{2}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. 2

---

21. Przekątna ściany sześcianu wynosi $3\sqrt{3}$. Przekątna tej bryły jest równa:

A. $3\sqrt{6}$. B. $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

---

22. Graniastosłup trójkątny prawidłowy i ostrosłup czworokątny prawidłowy mają równe krawędzie podstaw i objętości. Stosunek wysokości graniastosłupa do wysokości ostrosłupa wynosi

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{9}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

---

23. Prawdopodobieństwo zdarzenia X wynosi 40%. Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do zdarzenia Y wynosi 30%. Prawdopodobieństwo, że dojdzie do co najmniej jednego ze zdarzeń X lub Y wynosi 90%. Ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzenia X i Y jednocześnie?

A. około 12%. B. 20% C. 30% D. około 82%

---

24. Poniższa tabela prezentuje wartości osiągane przez funkcję h(x) w całej swojej dziedzinie.

x	-2	0	2	3	5	7	9
h(x)	-1	0	3	-1	0	3	3

Odchylenie standardowe wartości osiąganych przez funkcje h(x) wynosi

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{\frac{14}{5}}$ C. $\sqrt{\frac{22}{7}}$ D. $\sqrt{\frac{24}{7}}$

---

25. Szymon wyjeżdża na 3 tygodniowe wakacje. Każdy z 3 tygodni planuje spędzić w innej miejscowości nadmorskiej. Zadecydował, że każde następne miasto ma być bardziej wysunięte na wschód niż poprzednie. Wyboru dokona spośród takich miast jak: Rewal, Niechorze, Mielno, Łeba i Sopot. Na ile sposobów Szymon może zaplanować wakacje?

A. 8 B. 9 C. 10 D. 11 *Nie trzeba znać położenia miast!*

ZADANIA OTWARTE

---

25. (2 pkt) Chcąc pomnożyć nierówność przez wyrażenie o nieznanym znaku, trzeba zadbać o to, aby kierunek nierówności się nie zmienił.
Rozwiąż nierówność $\frac{2}{2-x} - 1 \geq 0$.

1. Założenie $x \neq 2$
2. Mnożymy nierówność przez wyrażenie $2 - x$ podniesione do kwadratu. Wówczas mamy pewność, że wyrażenie jest dodatnie i kierunek nierówności się nie zmieni.

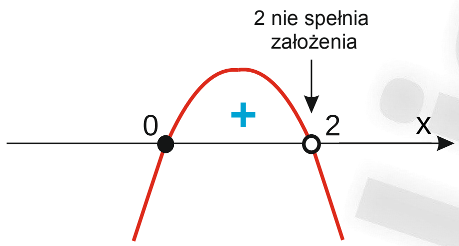
$$\frac{2(2-x)^2}{2-x} - 1(2-x)^2 \geq 0$$

$$2(2-x) - 1(2-x)^2 \geq 0$$

3. Mnożymy, redukujemy wyrazy podobne i otrzymujemy:

$$-x^2 + 2x \geq 0$$
$$x(-x+2) \geq 0$$
$$x = 0 \ \ lub \ \ -x+2 = 0$$
$$x = 0 \ \ lub \ \ x = 2 \ nie\ spełnia\ założenia$$

4. Rysujemy parabolę, mając na uwadze, że przy x^2 jest minus, dlatego ramiona są w dół.



5. Z uwagi na taką a nie inny znak nierówność naszym rozwiązaniem jest ten przedział x-sów, dla których parabola jest nad osią, lub na tej osi.
Rozwiązanie: $x \in <0; 2)$

---

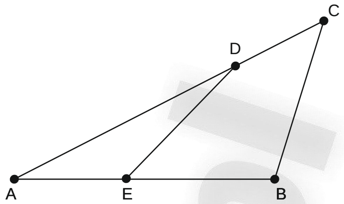
26. (2 pkt) Uzasadnij, że jeżeli liczba całkowita przy dzieleniu przez 8 daje resztę 5, to jej potrojony kwadrat przy dzieleniu prze 8 daje resztę 3.

1. Liczba całkowita, która przy dzieleniu przez 8 daje resztę 5 to:
$$k = 8n + 5, \qquad n \epsilon C$$
2. Potrojony kwadrat tej liczby to:
$3k^2 = 3(8n+5)^2 = 3(64n^2 + 80n + 25) = 192n^2 + 240n + 75$
3. Wyciągam liczbę 8 z dwóch pierwszych składników przed nawias. Liczbę 75 rozbijam na dwa składniki, tak aby jeden z nich był możliwie największą wielokrotnością liczby 8:
$$3k^2 = 8(24n^2 + 30n) + 75 = 8(24n^2 + 30n) + 8 \cdot 9 + 3$$
4. Ponownie wyciągam liczbę 8 przed nawias ze wszystkich składników oprócz 3
$$3k^2 = 8[24n^2 + 30n + 9] + 3, \quad \text{to kończy dowód}$$

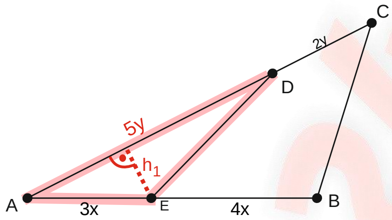
Składnik na żółtym tle jest liczbą całkowitą podzielną przez 8. Liczba 3 jest składnikiem, który stanowi resztę z dzielenia przez 8.

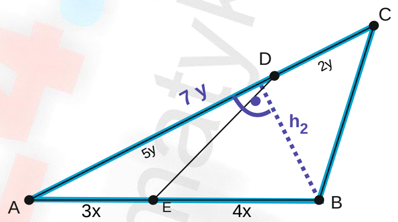
---

27. (2 pkt) W trójkącie ABC obrano 2 punkty. Punkt E dzielący bok AB w stosunku 3:4 (|AE|<|EB|) oraz punkt D dzielący bok AC w stosunku 2:5 (|AC|<|DC|). Udowodnij, że stosunek pola trójkąta AED do pola trójkąta ABC wynosi $\frac{15}{49}$.

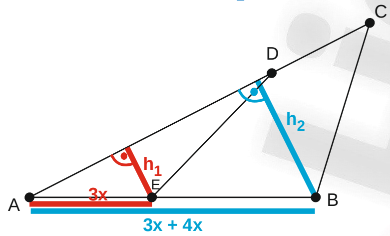


1. Wprowadzam oznaczenia wyrażające stosunki 2:5 i 3:4 , przy czym |AE|<|EB| i |AC|<|DC|.
2. Dla lepszej przejrzystości pokazuje 2 rysunki poniżej, dzięki którym łatwiej napisać wzory na pole trójkątów AED i ABC.





3. Obliczam stosunek $\frac{P\Delta_{AED}}{P\Delta_{ABC}} = \frac{\frac{5y\cdot h_1}{2}}{\frac{7y\cdot h_2}{2}} = \frac{5h_1}{7h_2}$. Widać, że brakuje jeszcze stosunku $\frac{h_1}{h_2}$.
4. Obliczam stosunek $\frac{h_1}{h_2}$.



wysokości h_1 i h_2 są wzajemnie równoległe, zatem:

$\frac{h_1}{3x} = \frac{h_2}{7x}$ po przekształceniu: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{7}$

5. Podstawiam $\frac{P\Delta_{AED}}{P\Delta_{ABC}} = \frac{5}{7}\cdot\frac{h_1}{h_2} = \frac{5}{7}\cdot\frac{3}{7} = \frac{15}{49}$

---

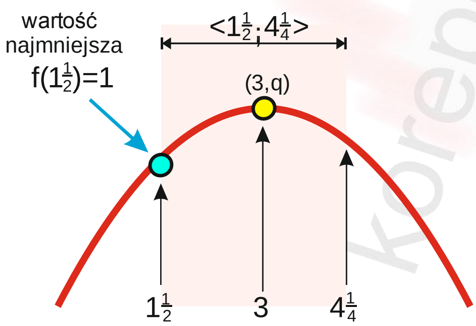
28. (2 pkt) Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + 4x - 2$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 3>$ i malejąca w przedziale $< 3; \infty)$. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $< 1\frac{1}{2}; 4\frac{1}{4} >$.

Trzeba zaważyć, że pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli to $p = 3$, czyli $\frac{-b}{2a} = 3$

Podstawiam $b = 4$, wtedy: $\frac{-4}{2a} = 3$ skąd wyznaczam: $a = \frac{-2}{3}$

Wyznaczoną wartość $\boldsymbol{a}$ podstawiam do wzoru funkcji kwadratowej : $f(x) = \frac{-2}{3}x^2 + 4x - 2$

Możemy wykonać rysunek pomocniczy:



Wartość najmniejsza w przedziale $< 1\frac{1}{2}; 4\frac{1}{4} >$ to:

$f\left(1\frac{1}{2}\right) = \frac{-2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4\cdot\frac{3}{2} - 2 = 1$

---

29. (2 pkt) Dane są funkcje $g(x) = 9x^3 + 1$ i $h(x) = 3x^2 + 3x$. Znajdź miejsca zerowe funkcji $f(x) = g(x) - h(x)$.

Podstawiam i przyrównuje do zera, pamiętając o zmianie znaków lub o nawiasie.

$$f(x) = g(x) - h(x) = 9x^3 + 1 - (3x^2 + 3x)$$

$$9x^3 + 1 - 3x^2 - 3x = 0$$

Grupuje: $9x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$

Wyciągam przed nawias: $3x^2(3x - 1) - 1(3x - 1) = 0$

Zielony nawias rozpisuje ze wzoru: $(3x^2 - 1)(3x - 1) = 0$

Przyrównuje nawiasy do zera: $(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)(3x - 1) = 0$

$\sqrt{3}x - 1 = 0$ lub $\sqrt{3}x + 1 = 0$ lub $3x - 1 = 0$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = \frac{1}{3}$

----

30. (2 pkt) Adam ma z matematyki następujące oceny: 1, 3, 4, 4, 5, 6. Nauczyciel dając szansę na poprawę jedynki powiedział Adamowi: „ Losujesz jednocześnie dwie z sześciu swoich ocen. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że iloczyn wylosowanych ocen nie jest podzielny przez 3 ?" Rozwiąż zadanie, które dostał Adam.

Liczba nie jest podzielna przez 3, wtedy gdy suma cyfr tworzących tą liczbę nie jest podzielna przez 3. Poniższa tabela, prezentuje wszystkie możliwe przypadki, dla zdarzenia zdefiniowanego w treści zadania. W polach niebieskich jest jedna z dwóch wylosowanych ocen, zaś w polu czerwonym druga. Wszystkie pozostałe liczby są wynikiem mnożenia liczby z pola niebieskiego, przez liczbę z pola czerwonego. W polach żółtych znajdują się liczby niepodzielne przez 3. Główna przekątna jest wykreślona, ponieważ nie można 2 razy wylosować tego samego elementu (nie mylić z wartością elementu, gdyż można wylosować różne elementy o tej samej wartości np. 4 i 4).

	1	3	4	4	5	6
1	X	3	4	4	5	6
3	3	X	12	12	15	18
4	4	12	X	16	20	24
4	4	12	16	X	20	24
5	5	15	20	20	X	30
6	6	18	24	24	30	X

Ilość wszystkich możliwych wyników (ilość białych i żółtych pól):

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 - 6 = 30$$

Ilość zdarzeń zdefiniowanych w treści zadania (ilość żółtych pól) :

$$|A| = 10$$

Prawdopodobieństwo:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{3}$$

----

31. (4 pkt) $\sin^2\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha + \cos^2\alpha = 0$ i $\operatorname{tg}\alpha > 0$. Oblicz $\sqrt{6} + \cos\alpha$. Wynik przedstaw w postaci $\frac{a\sqrt{c}}{b}$, gdzie a, b i c to liczby całkowite.

$$\sin^2\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha + \cos^2\alpha = 0$$

Wyznaczam $\sin\alpha$

$$\sqrt{3}\sin\alpha = -1 \qquad /:\sqrt{3}$$

$$\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Przekształcamy wzór na jedynkę trygonometryczną: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

Nie ma informacji, że kąt α jest ostry. Rozważamy 2 przypadki.

$$\cos\alpha_1 = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \quad \text{oraz} \quad \cos\alpha_2 = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$\cos\alpha_1$ nie spełnia warunku $\operatorname{tg}\alpha > 0$, gdyż $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha\ (ujemny)}{\cos\alpha\ (dodatni)}$.

Wybieramy tylko rozwiązanie ujemne: $\cos\alpha_2 = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{6}}{3}$$

Podstawiam obliczony $\cos\alpha$ do polecenia z treści zadania:

$$\sqrt{6} + \cos\alpha = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

---

32. (4 pkt) O punktach $A = \left(-3\sqrt{2}, \sqrt{2}a\right)$, $B = (6, a)$ i $C = (b, 2)$ wiadomo że:

- pierwsze współrzędne kolejno punktów A, B, C stanowią kolejne wyrazy ciągu geometrycznego
- drugie współrzędne kolejno punktów A, B, C stanowią kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego

Wyznacz **a** i **b**. Oblicz długość odcinka AC.

1. Liczby $-3\sqrt{2}, 6, b$ w podanej kolejności mają tworzyć ciąg geometryczny. Stosuje wzór na środkowy wyraz ciągu geometrycznego ${a_n}^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$

$$6^2 = -3\sqrt{2} \cdot b$$

$$b = \frac{36}{-3\sqrt{2}} = -6\sqrt{2}$$

2. Liczby $\sqrt{2}a, a, 2$ w podanej kolejności mają tworzyć ciąg arytmetyczny. Stosuje wzór na środkowy wyraz ciągu arytmetycznego $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

$$a = \frac{\sqrt{2}a + 2}{2}$$

$$a\left(2-\sqrt{2}\right) = 2 \qquad /:\left(2-\sqrt{2}\right)$$

$$a = \frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{2}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}$$

3. Obliczamy drugą współrzędną punktu A

$$\sqrt{2}a = \sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2$$

4. Poniżej wszystkie współrzędne punktów A, B, C.

$$A = \left(-3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}+2\right), \quad B = \left(6, 2+\sqrt{2}\right), \quad C = \left(-6\sqrt{2}, 2\right)$$

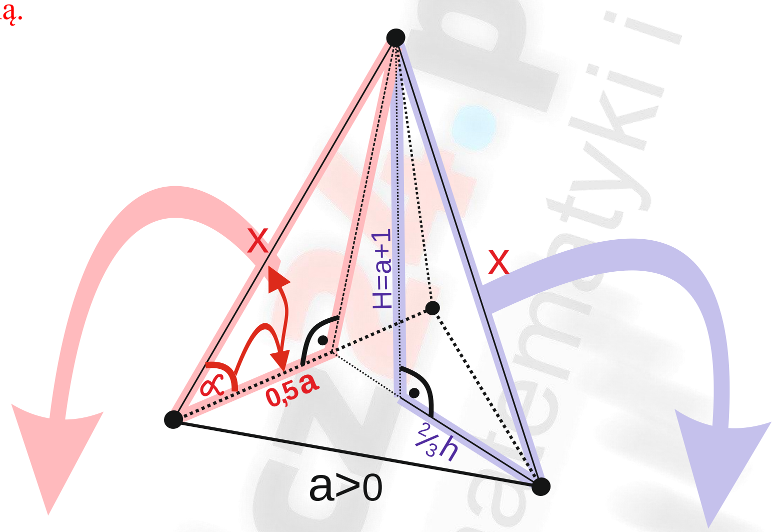
5. Obliczam długość odcinka AC ze wzoru na długość odcinka

6. $|AC| = \sqrt{\left[-3\sqrt{2} - \left(-6\sqrt{2}\right)\right]^2 + \left[2\sqrt{2} + 2 - (2)\right]^2} = \sqrt{162 + 8} = \sqrt{170}$

---

33. (5 pkt) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest krótsza o 1 od wysokości bryły i tworzy z krawędzią boczną kąt alfa, taki że $\cos\alpha = 0{,}25$. Uzasadnij, że długość krawędzi podstawy wynosi $\frac{3+\sqrt{33}}{8}$.

1. Tworzymy rysunek wraz z oznaczeniami. Wyróżniamy 2 trójkąty prostokątne. Zaczynamy od tego po lewej stronie, na którym zaznaczamy kąt jaki tworzy krawędź podstawy z krawędzią boczną.



2. Wykorzystujemy informację, że $\cos\alpha = 0{,}25$.

Na rysunku widzimy, że $\cos\alpha = \frac{0{,}5a}{x}$, zatem:

$0{,}25 = \frac{0{,}5a}{x}$ skąd otrzymujemy $x = 2a$

3. W tym trójkącie dążymy do tego, aby długość każdego boku była uzależniona od $\boldsymbol{a}$. Wówczas korzystając z tw. Pitagorasa otrzymamy równanie z jedną niewiadomą $\boldsymbol{a}$, którą trzeba wyznaczyć.

$H = a + 1$, $x = 2a$

Podstawa tego trójkąta prostokątnego ma długość równą $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta równobocznego $\frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

4.Korzystam z tw. Pitagorasa: $x^2 = H^2 + \left(\frac{2}{3}h\right)^2$

$$(2a)^2 = (a+1)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$4a^2 = a^2 + 2a + 1 + \frac{a^2}{3} \quad /\cdot 3$$

$$12a^2 = 3a^2 + 6a + 3 + a^2$$

$$8a^2 - 6a - 3 = 0$$

$$\Delta = 132 \,, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{33}$$

$$a_1 = \frac{6 - 2\sqrt{33}}{16} \quad lub \quad a_2 = \frac{6 + 2\sqrt{33}}{16}$$

$$a_1 = \frac{3 - \sqrt{33}}{8} < 0 \quad lub \quad a_2 = \frac{3 + \sqrt{33}}{8}$$

a_1 nie spełnia warunku $a > 0$. Jedynym rozwiązaniem jest $a_2 = \frac{3+\sqrt{33}}{8}$

Za całkowicie poprawne rozwiązania zadań, uwzględniające inny tok rozumowania niż podany w schemacie punktowania, przyznaje się maksymalną liczbę punktów.